ESSEC CONCOURS D'ADMISSION DE 1997

OPTION ECONOMIQUE
OPTION LETTRES ET SCIENCES HUMAINES

Mathématiques II

Vendredi 2 Mai 1997 de 14h à 18h

On considère deux machines identiques et on note X_1, X_2 les variables aléatoires indiquant les durées de marche de la 1ière et de la 2ième machines (avant que celles-ci ne tombent en panne) à partir d'un instant 0.
On désigne par a un nombre réel strictement positif donné, et l'on fait les hypothèses suivantes sur le fonctionnement des machines:

(H1) Pour tout couple (t, h) de nombres réels tels que $t \geq 0$ et $h > 0$, on suppose que la variable aléatoire X_i ($i = 1$ ou $i = 2$) à valeurs dans R+ indiquant la durée de marche de la ième machine à partir de l'instant 0 vérifie la relation suivante:

$$P(X_i < t+h / X_i \geq t) = ah + h\varepsilon(h)$$

où $\varepsilon(h)$ est une fonction indépendante de l'entier i et de l'instant t qui tend vers 0 lorsque h tend vers 0.

(H2) Les deux machines fonctionnent indépendamment l'une de l'autre.

Pour tout nombre réel positif t, on désigne par:
- N(t) la variable aléatoire indiquant le nombre de machines en panne à l'instant t.
- $p_0(t)$, $p_1(t)$ et $p_2(t)$ les probabilités $P(N(t) = 0)$, $P(N(t) = 1)$ et $P(N(t) = 2)$ pour que le nombre de machines en panne à l'instant t soit exactement égal à 0, 1 et 2. On suppose les deux machines en marche à l'instant 0, autrement dit $p_0(0) = 1$.

L'objectif est de déterminer, sous ces hypothèses, la loi du nombre aléatoire N(t) des machines déjà tombées en panne à un instant t. Le résultat de l'étude est obtenu par deux méthodes indépendantes dans les parties I et II.

Une calculatrice de poche pouvant être programmable et /ou alphanumérique, à fonctionnement autonome, sans imprimante, sans document d'accompagnement et de surface de base maximum de 21 cm de long sur 15 cm de large est autorisée.

PARTIE 1

On étudie ici la loi de la variable aléatoire N(t) en déterminant la loi des variables aléatoires X_1, X_2 introduites dans le préambule.

1°) Lois de la durée de marche X_i d'une machine (i = 1 ou 2).

On désigne par (t, h) un couple de nombres réels tels que $t \geq 0$ et $h > 0$, et l'on note $g_i(t) = P(X_i \geq t)$ la probabilité pour que X_i soit supérieure ou égale à t.

a) Comparer les événements $(X_i \geq t)$ et $(t \leq X_i < t+h) \cup (X_i \geq t+h)$.
En déduire l'expression de la probabilité $P(t \leq X_i < t+h)$ en fonction de $g_i(t)$ et $g_i(t+h)$, puis établir à l'aide de l'hypothèse H1 l'égalité $g_i(t) - g_i(t+h) = [ah+h\varepsilon(h)]g_i(t)$.

b) En déduire successivement que:
- $0 \leq g_i(t) - g_i(t+h) \leq [a+\varepsilon(h)]h$.
- $0 \leq g_i(t-h) - g_i(t) \leq [a+\varepsilon(h)]h$ lorsque $0 < h \leq t$.

En déduire que la fonction $t \to g_i(t)$ est continue à droite sur $[0, +\infty[$, puis, en formant le quotient $[g_i(t+h) - g_i(t)]/h$ et en prenant sa limite lorsque h tend vers 0, montrer que la fonction $t \to g_i(t)$ est dérivable à droite sur $[0, +\infty[$.
Donner l'expression de sa dérivée à droite en t en fonction de a et $g_i(t)$.
En déduire de même que la fonction $t \to g_i(t)$ est continue à gauche sur $]0, \infty[$, puis dérivable à gauche sur $]0, +\infty[$.

c) Etablir que g_i est dérivable sur $\mathbf{R}+$ et exprimer $g_i'(t)$ en fonction de a et $g_i(t)$.
En étudiant la fonction $t \to \exp(at).g_i(t)$ sur $\mathbf{R}+$ et en remarquant que $g_i(0) = 1$, expliciter la fonction g_i.

d) En déduire la fonction de répartition, la densité, la loi et l'espérance des variables X_i ainsi qu'une interprétation du nombre réel a.

2°) Etude de la loi de la variable aléatoire N(t).

Déduire des résultats précédents les expressions factorisées des trois probabilités $p_0(t)$, $p_1(t)$, $p_2(t)$, la loi et l'espérance de N(t).
Quelle sont les limites de $p_0(t)$, $p_1(t)$, $p_2(t)$ quand t tend vers $+\infty$? Etait-ce prévisible?

PARTIE 2

On étudie maintenant par une seconde méthode la loi de la variable aléatoire N(t).

Cette étude, indépendante de celle de la partie I, n'utilise aucun de ses résultats.

On désigne par (t, h) un couple quelconque de nombres réels tels que $t \geq 0$ et $h > 0$.

1°) Etude des probabilités conditionnelles $P(N(t+h) = k / N(t) = i)$.

a) Que valent les trois probabilités $P(N(t+h) = 1 / N(t) = 2)$, $P(N(t+h) = 0 / N(t) = 1)$ et $P(N(t+h) = 0 / N(t) = 2)$?

b) Etablir, en les justifiant, les résultats suivants où les symboles ε, ε_1, ... désignent des fonctions définies sur $\mathbf{R}+$ et de limite nulle en 0:

- $P(N(t+h) = 0 / N(t) = 0) = [1-ah-h\varepsilon(h)]^2 = 1 - 2ah + h\varepsilon_1(h)$.
  $P(N(t+h) = 1 / N(t) = 1) = 1 - ah - h\varepsilon(h)$.
  $P(N(t+h) = 2 / N(t) = 2) = 1$.
- Exprimer de même $P(N(t+h) = 2 / N(t) = 1)$ et $P(N(t+h) = 1 / N(t) = 0)$.
- Montrer enfin que $P(N(t+h) = 2 / N(t) = 0) = h\varepsilon_2(h)$.

2°) Etude des probabilités de panne $p_k(t)$.

a) A l'aide de la formule des probabilités totales, exprimer $p_0(t+h)$, $p_1(t+h)$, $p_2(t+h)$ en fonction de a, h, $p_0(t)$, $p_1(t)$, $p_2(t)$.

Quelles expressions de $p_k(t+h) - p_k(t)$, puis de $p_k(t) - p_k(t-h)$ (où $h \leq t$), en déduit-on pour $k = 0$, $k = 1$, $k = 2$?

b) En déduire que les fonctions $t \to p_k(t)$ sont continues à droite sur $[0, +\infty[$, puis, en formant les quotients $[p_k(t+h) - p_k(t)]/h$ pour $k = 0$, $k = 1$, $k = 2$ et en prenant leurs limites lorsque h tend vers 0, montrer que les fonctions $t \to p_k(t)$ sont dérivables à droite sur $[0, +\infty[$.

Donner l'expression de leurs dérivées à droite en t en fonction de a, $p_0(t)$, $p_1(t)$, $p_2(t)$.

En déduire de même que les fonctions $t \to p_k(t)$ sont continues à gauche sur $]0, +\infty[$, puis dérivables à gauche sur $]0, +\infty[$.

c) En déduire la relation (R) suivante:

$$\begin{bmatrix} p_0'(t) \\ p_1'(t) \\ p_2'(t) \end{bmatrix} = M \cdot \begin{bmatrix} p_0(t) \\ p_1(t) \\ p_2(t) \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad M = \begin{bmatrix} -2a & 0 & 0 \\ 2a & -a & 0 \\ 0 & a & 0 \end{bmatrix}.$$

3°) Etude de la diagonalisation de la matrice M.

a) Déterminer les valeurs propres de cette matrice M, que l'on notera λ_0, λ_1, λ_2 avec $\lambda_2 < \lambda_1 < \lambda_0$.

b) Déterminer successivement les vecteurs-colonnes propres V_0 associé à λ_0, V_1 associé à λ_1, V_2 associé à λ_2, dont les troisièmes composantes sont égales à 1.

La matrice M est-elle diagonalisable?

c) Soit Π la matrice d'ordre 3 dont les trois vecteurs-colonnes sont, dans cet ordre, V_0, V_1, V_2. Etablir que cette matrice est inversible, préciser son inverse, et expliciter la matrice $\Pi^{-1}M\Pi$.

4°) Etude de la loi de la variable aléatoire N(t).

On pose, avec les notations précédentes:

$$\begin{bmatrix} p_0(t) \\ p_1(t) \\ p_2(t) \end{bmatrix} = \Pi \cdot \begin{bmatrix} q_0(t) \\ q_1(t) \\ q_2(t) \end{bmatrix}.$$

a) Montrer que q_0, q_1, q_2 sont dérivables sur $\mathbf{R}+$ et déduire de la relation (R) du 2°:

$$q_0'(t) = 0 \quad ; \quad q_1'(t) = -aq_1(t) \quad ; \quad q_2'(t) = -2aq_2(t).$$

b) En déduire que les fonctions $t \to q_0(t)$, $t \to \exp(at).q_1(t)$ et $t \to \exp(2at).q_2(t)$ sont constantes (on notera C_0, C_1, C_2 les valeurs de ces constantes réelles).

En déduire les expressions de $p_0(t)$, $p_1(t)$, $p_2(t)$ en fonction de C_0, C_1, C_2, a et t.

c) En précisant les valeurs de $p_0(0)$, $p_1(0)$, $p_2(0)$, déterminer les constantes C_0, C_1, C_2.

d) En déduire à nouveau les expressions factorisées de $p_0(t)$, $p_1(t)$, $p_2(t)$, la loi et l'espérance de la variable aléatoire N(t).

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail